**Введение**

 “Нелинейная физика“ уже является общепринятым термином. Ведущие научные журналы мира имеют рубрику под таким названием. Выпущены первые монографии, обзоры.

 Основное содержание дисциплины определяют вопросы статистической физики открытых нелинейных систем, обменивающихся с внешней средой, веществом, энергией и информацией. С термодинамической точки зрения к данной проблеме можно подойти, рассматривая нелинейные неравновесные явления. С общефизической точки зрения круг рассматриваемых вопросов можно назвать физикой хаоса и порядка. Наконец, современная общенаучная методология - синергетика (теория самоорганизующихся систем ) базируется, в основном на достижениях нелинейной физики.

 В принципе все физические явления нелинейные, если их рассматривать достаточно детально. Однако” физика нелинейных явлений” и “Нелинейная физика” не равнозначные термины. Нелинейная физика устанавливает наиболее общие категории, свойства и закономерности сложных систем. Например, общими для всех открытых нелинейных систем являются понятия странный аттрактор, бифуркация, динамический хаос, перемежаемость, фрактал, мультифрактал, информация и энтропия, самоорганизация, солитон, квазичастица.

 В учебном пособии изложена сущность указанных основных понятий, которые, по мнению автора, составляют начала нелинейной физики. С целью ознакомления читателей с некоторыми современными проблемами, приведены научные результаты автора по теории фракталов и мультифракталов, информационного анализа самоорганизующихся систем, по приложению принципов синергетики к социальным системам.

1. НЕЛИНЕЙНЫЙ МАЯТНИК. СТОХАСТИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ.

 На примере нелинейного маятника рассматривается возможность хаотизации движения в нелинейных системах, описываемых детерминированными уравнениями движения.

 Малые отклонения маятника x от равновесия описываются линейным уравнением

 d2 x

 wo2x , (1.1 )

 d t2

 где t - время , wo - собственная частота . Решения ( 1.1 ) представляются через гармонические функции. Если отклонения немалые, то следует пользоваться **нелинейным** уравнением.

 d2x

 ω02 sinх =0. (1.2)

 dt2

Решения (1.2) в общем случае неоднозначные. Но сравнительно простой анализ в **фазовом** пространстве (в пространстве переменных скорость - координата) позволяет установить ряд качественно новых результатов.

 Запишем (1.2) через систему из двух дифференциальных уравнений, каждое из которых является уравнением первого порядка:

 dv dx

 + w02sin x = , = v (1.3 )

 dt dt

Исключая из (1.3) дифференциал времени, запишем

 vdv + wo2sin x dx = 0 (1.4)

Интегрирование (1.4) в пределах ( v,v0 ), ( о,х ) дает

 v2 v02

 w02 cosx = ⎯⎯ - ω02 ≡ Η, (1.5)

 2 2

где Н - гамильтониан (функция энергии). При H < ωo2 фазовые траектории ( зависимость v = v(x)) представляют собой замкнутые линии, которые описывают колебание маятника ( финитное движение ). Фазовые траектории имеют особые точки: типа  **центр** (v = 0, x = 2πn ), типа **седло**( v=0, x = 2π ( n+1) ; n=0,±1,..Особая точка называется центром, если некоторая окрестность сплошь заполнена непересекающимися замкнутыми фазовыми траекториями, окружающими эту точку. Седлом называют такую особую точку, к которой примыкает конечное число фазовых траекторий, разбивающих некоторую окрестность рассматриваемой точки на области, где траектории ведут себя подобно семейству гипербол, заданных уравнениями vx = const.

 При H > ωо2 фазовые траектории становятся волнистыми линиями и соответствуют вращательным движениям маятника ( инфинитное движение ). Траектория с Н = ωо2 является **сепаратрисой,** которая разделяет два различных типа движений.

 Решение на сепаратрисе находится из уравнения ( 1.5 ), в котором следует положить

 Н = НS = ωо2 ( 1.6 )

После этого имеем уравнение

 dx

 ⎯⎯ = ± 2ωо2 cos ( х /2 ) ( 1.7 )

 dt

 Его решение имеет вид [ 1 ]

 Χ = 4 αrc tg е ± ωоt  −π ( 1.8 )

при начальном условии t = 0, х = 0 .Двум знакам соответствуют две сепаратрисы - входящая в седло и выходящая из него. Используя ( 17 )можно получить из ( 18 )

 V = ±2ωо  / c (ωо t )

Это решение , содержащее гиперболический косинус, описывает **солитон -** уединенную волну, образуемую в нелинейной среде.

 Замкнутые фазовые траектории описывающие устойчивые движения, называются **аттракторами** ( в переводе с английского “притягивающие объекты”). К ним относятся предельные циклы и неподвижные точки в фазовом пространстве. В рассмотренном выше примере нелинейной консервативной (без диссипации) системы, хотя характер движения может быть неоднозначным, имеет место некоторая устойчивость , заключающаяся в том,что при малых изменениях начальных данных фазовая точка переходит с одной траектории на другую но сколь угодно близко лежащую к первоначально рассматриваемую. Наличие диссипации качественно меняет фазовый портрет движения. Обычный аттрактор становится **странным аттрактором ,** который имеет очень сложную структуру: все траектории с течением времени проходят через каждую его точки, расстояния между первоначально сколь угодно близкими точками на аттракторе через достаточно большое время становятся конечными. Странные аттракторы впервые обнаружены Е.Лоренцом на основе упрощенных трехмерных уравнений тепловой конвекции в жидкости. Качественное изменение фазового портрета диссипативной системы можно проследить, изучая уравнение (12) с трением:

 d2x dx

 ⎯⎯ + ωο2x + c ⎯⎯ = 0, с > 0 (1.10)

 dt2 dt

Теперь в окрестности особых точек типа центр замкнутые фазовые траектории при слабом трении переходят в спирали, а при сильном трении - в траектории, которые “входят” в особые точки в определенных направлениях.

 Таким образом, нелинейность и реальные начальные условия, задаваемые с конечной точностью, приводят к нерегулярности движения в системе, описываемой строгими уравнениями. Развивается отрасль науки, которая называется “Теория динамического (детерминированного) хаоса.” В общем виде с математической точки зрения вопрос формулируется об исследовании эволюции системы, описываемой уравнениями вида

 →

 dx (t) → →

 ⎯⎯⎯ = (х), х (t) = (х1 (t), ,х(t )) (1.11)

dt

 →

где х - N - мерный вектор с начальными значениями → х (0).

2 ОТОБРАЖЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС

 Через простейшие дискретные аналоги дифференциальных уравнений нелинейных явлений устанавливаются наиболее общие закономерности динамического хаоса.

 Эволюцию динамической системы в фазовом пространстве более простым образом можно проследить не с помощью непрерывных функций P (t), q(t) (обобщенных импульсов и координат), а через их дискретные значения. Для этого представим , что время меняется дискретно ( t = to, t1,...,ti...). Примером такой ситуации является шахматная игра, где состояние системы меняется только после очередного хода. Если в момент времени ti. известны Pi = P(ti), qi = q (ti) то соотношение

 ( Рi+1, q i+1 ) = Тi, (pi, qi ) (3.1)

определяет фазовую точку в момент ti+1 через некоторый оператор Тi . Вид оператора Тi в принципе можно приближенно установить, используя известные последовательные значения Pi, qi . Соотношение (2.1) называется **отображением** Пуанкаре, оно задает отображение фазового пространства в себя и заменяет уравнения движения в дифференциальной форме. В общем случае из дифференциальных уравнений движения нельзя установить вид оператора Тi. Это возможно в случае расщепления исходных уравнений на систему уравнений первого порядка. Например, уравнение нелинейного маятника (1.2) можно представить в виде совместной системы.

 Pi+1  = Pi - ωo2Δ t ⋅ Sinxi (2.2)

 Xi+1  = Xi + Δ t Pi+1

где использованы обозначения

 8

 P = mv, m=1. dp→Δp = Pi+1 − Pi

Для обеспечения точности вычислений выбираются малые значения Δ t, удовлетворяющие неравенству

 ωо2 ( Δ t)2 << 1

 Отображения (2.2) можно записать в универсальной форме справедливой для всех динамических систем, имеющих гамильтониан с возмущением:

 H=⎯ P2 - ω02 cosx ∑ cos (nνt), ν=2π/Δt (2.3)

 2  n=-∞

Если учесть тождество для дельта-функции Дирака

  ∞ ∞ 2πt

 ∑ δ (t /Δt - n ) = ∑ cos (n ⎯⎯ ), (2.4)

n=-∞  n=-∞ Δt

То возмущение в (2.3) означает периодическую ( с перидом Δt ) последовательность толчков ( δ- импульсов) на систему.

 Введем переменные действие ( I) - угол (θ):

 1

 I = ⎯⎯ ∫ Pd, S ( ,I) = ∫ P () d, (2.5)

 2π

 θ=∂S (,I) ∂I

В новых переменных гамильтониан и уравнения движения запишутся в виде

 1 ∞

 H= ⎯ I2 - ω02 cosθ ∑ cos (nνt) (2.6)

 2  n=-∞

dI ∞ t dθ

 ⎯⎯⎯-  - ω02 sin θ ∑ δ ( ⎯⎯ - n ),⎯⎯ =I (2.7)

 dt  n=-∞ Δt dt

Между двумя δ - функциями

 I = const, θ = I\*t + сonst

При переходе через δ - функцию переменная θ - остается непрерывной, а действие I изменяется на величину ω02 sinθ, следовательно имеем

 I Iω02 sinθ (mod 2π) (2.8)

 θ1  θI1,Δt = 1

Система (2.8) называется **стандартным** отображением Чирикова-Тейлора

 Как видно, переход к дискретным уравнениям эквивалентен добавлению внешней периодической силы. По этой причине исследование отображений, соответствующих даже простейшим дифференциальным уравнениям, дают новые содержательные сведения о свойствах нелинейной системы.

Логистическое отображение

 Рассмотрим разностный аналог простейшего нелинейного уравнения

 x= λ хx (2.9)

 Отображение (2.9) называется  **логистическим ,** оно универсальным образом описывает общие черты поведения нелинейных систем различной природы: ротатора, на которого действует периодические толчки, популяции биологического объекта в замкнутой среде, роста банковского сбережения и т.д. М. Фейгенбаум показал [2], что структура хаоса, получаемого от (2.9)не зависит от конкретного вида правой части при выполнении только условия единственности максимума квадратичной функции. Поэтому мы рассмотрим более простое отображение

 xλ x2 (2.10)

и будем искать его универсальные свойства относительно параметра λ. Пренебрегая высшими степенями имеем

 λ+ 2λ (2.11)

Запишем (2.11) в первоначальной форме

 xλ1 λ1=2λ2(λ−1)≡ϕ(λ) (2.12)

Повторяя эту операцию с масштабными множителями

 →/α1 , α1=1/(1−λ1) (2.13)

получим

 xn =1- λn λn=ϕ(λn-1) (2.14)

Чтобы найти значения λn  воспользуемся условиями наличия неподвижной точки в периодическом движении \*, которые становятся неустойчивыми при λ>λn+1 ≡λ\*n для знака возмущений - мультипликатора μ:

 dx1

 x\*=x μ = ⎯⎯⎯ ⏐ =-1 (2.15)

 dx ⏐ =

Равенство μ=-1 означает что начальное возмущение через период меняет знак, не меняясь по абсолютной величине: еще через период перейдет само в себя и происходит **бифуркация удвоения периода.**Из (2.10) и (2.15) следует

 x\*=1−λ\*x\*2, - 1=-2λ\*x; λ\*=3/4 ≡λ\*1(2.16)

 λ\*1=ϕ(λ\*2), λ\*(n-1) = ϕ(λ\* n)

При n→ ∞ последовательность чисел λ\*n стремится к конечному пределу λ\*∞ - корню уравнения

 λ\*∞ = ϕ(λ\*∞), 2λ\*∞2 - 2λ\*∞ - 1= 0, λ\*∞=1,37 (2.17)

Интервалы между последовательными критическими значениями λ\*n меняются универсальным образом:

 λ\*2n+1−λ\*,n λ\*⋅n −λ\*

δ =⎯⎯⎯⎯⎯ → ⎯⎯⎯⎯⎯ → ϕ′(λ\*,)=4+ (2.18)

 λ\*,n+2−λ\*,n+1 λ\*,n+1 −λ\*

К конечному пределу стремятся и масштабные множители

 αn→ α α =1/(1−λ\*∞)=−2,8 (2.19)

Числа Фейгенбаума δ,α∞ могут быть уточнены многократным компьютерным итерированием исходного отображения (2.10). Эксперименты различного характера (тепловая конвекция, возбуждение нелинейной электрической цепи и др.) подтверждают существование таких универсальных постоянных. В гидродинамических задачах значения λ\*  связаны с критическими числами Рейнольдса.

3 ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ В ДИНАМИЧЕСКОМ ХАОСЕ

 Рассматривается сущность особого явления, сопровождающего динамический хаос - перемежаемости, приведены описывающие его простые отображения.

 3.1. Механизмы перемежаемости

 Перемежаемостью называется явление случайного чередования регулярных сигналов с хаотическими всплесками относительно большой амплитуды Физически это означает образование в нелинейной среде структур различного пространственно- временного масштаба и мультипликативный характер распределения их вероятности реализации. Среди всех возможных реализаций значений случайной величины при одной реализации, когда все вероятности соответствуют максимальной амплитуде их произведение дает малую вероятность редкого всплеска.

 С математической точки зрения перемежаемость описывается как разрушение периодического движения при значении мультипликатора (2.15) μ=+1. Для этой цели функцию отображения, зависящую от параметра ε, представим в виде разложения

  ε+2, ε = \*  (3.1)

где параметры \*  в гидродинамике могут иметь смысл числа Рейнольдса и его критического значения. При ε=0 функция (3.1) касается прямой  Выбрав точку касания из (3.1) получим μ=+1. При ε< 0 существуют две неподвижные точки функции (3.1):

 \*1=−( |ε | )1/2, \*2=+ |ε| )1/2, (3.2)

из которых х\*1 отвечает устойчивому, х\*2 - неустойчивому периодическому движению. При ε= 0 мультипликатор в обоих точках равен +1, оба периодически их движения сливаются. Этот случай называется **обратной касательной бифуркацией**, в противоположность бифуркации удвоения, когда число неподвижных точек удваивается. При ε>0 неподвижные точки исчезают, становятся комплексными.

 Можно оценить длительность регулярных интервалов перемежаемых явлений Т. Запишем разностное уравнение (31) в виде дифференциального , заменяя производной dx/dt по непрерывной переменной t:

 dx

 ⎯⎯ = ε+ х2  (3.3)

dt

Интегрируя в пределах х\*1, х\*2, имеем

  -1/2 -1/2 х\*2 -1/2

 Т= ε arctg (х ε ) ⎪ , Т ε (3.4)

 х\*1

 3.2.Отображение для перемежаемости квазистационарных явлений.

 Динамический хаос имеет часто квазистационарную природу: число рождающихся и уничтожающихся структур сбалансировано. В работах [3,4] показано, что в турбулентном вихре число рождающихся и уничтожающихся мелких вихрей всегда равны между собой, его состояние виртуальное (квазистационарное). Логистическое отображение (2.9) учитывает только ограничение роста физической величины в замкнутой среде (множитель (1−)) Для квазистационарных явлений можно использовать отображение

 λλ (3.5)

Где учтено, что вероятность реализации независимых событий рождения и уничтожения структур определяется теоремой умножения вероятностей:

t (3.6)

 ≤ 1, λ /2 → λ

Отображение (3.5) в отличии от отображений типа Фейгенбаума имеет кубичную нелинейность.

 Формула (3.5) в работе [5] получена из условия существования решения уравнений движения и неразрывности для квазидвумерного гидродинамического вихря. Использована оценка для случая малой надкритичности

 ~ ± 0 /\*) (3.7)

где  число вихрей в моментах времени, число Рейнольдса, \* − его критическое значение, знаки +,− соответствуют рождению и уничтожению вихревых структур. Известна оценка Ландау[2] для развитой турбулентности >> \*):

 \*)9/4  (3.8)

Удобно анализировать отображение для квазистационарных явлений в форме

 (3.9)

которая переходит в формулу (3.5) после необходимых перенормировок величин Постоянная имеет смысл максимально возможного числа вихрей в динамическом кластере. При ≥ 4 число вихрей с течением времени неограниченно возрастает, кластер становится стохастическим. При имеем чередующиеся значения ±1. Таким свойством обладает вихрь в квазистационарном (виртуальном) состоянии. В случае получим устойчивый цикл соответствующий спаренному состоянию вихрей. Знак минус означает слияние вихрей, уничтожение степеней свободы. Эти свойства квазидвумерных (с возмущаемой поверхностью) гидродинамических вихрей, вытекающие из (3.9) ,полностью подтверждаются экспериментом . Численный анализ стандартными методами показал, что отображение (3.5), в отличие от формулы (2.9),описывает перемежаемость при малой надкритичности,в области перехода к хаосу. В фазовом портрете (в зависимости (λ) ) наблюдаются “провалы” начиная с первых двух бифуркаций (при λ ≈ 2,2 ).

 В реальных течениях жидкости перемежаемость наблюдается как чередование вихревых структур. Пульсирование силы электрического тока, например в полупроводниках, при низких частотах (**фликкер-шум**) может рассматриваться как перемежаемость. Рассмотренные простые подходы могут быть применены также к анализу перемежаемых явлений химической, биологической, функционально-информационной природы.

4 ФРАКТАЛЫ

 Вводится понятие о фракталах , о фрактальной размерности и приведены примеры применения фракталов к описанию турбулентного переноса.

 4.1.Фракталами называются объекты, имеющие структурное, иерархически самоподобное строение. К числу таких объектов относятся молекулярные структуры сложных веществ, турбулентный вихрь, береговая линия, облака, Галактики и т.д. Фрактальность проявляется и в фазовых пространствах, в которых описываются нелинейные процессы и явления, функциональная деятельность сложных систем: взаимодействие адронов, образование странного аттрактора, изменение экономических показателей общества.

 Строгого и полного определения фракталов пока нет. Один из основателей теории фракталов Б.Мандельброт предложил следующий вариант определения фракталов :

 Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому.

 Первоначальный вариант, предложенный Б.Мандельбротом был следующим:

 Фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа- Безиковича которого строго больше его топологической размерности.

 Это определение требует введения понятия “фрактальная размерность” (D) наряду с топологической размерностью (d). В обычном евклидовом пространстве точка, линия, квадрат, куб имеют, соответственно, топологическую размерность 0,1,2,3. Можно ввести соответствующие метрические характеристики (меру) длина, площадь, объем. Но как измерить длину сильно ломаной кривой (береговой линии) Очевидно, что результат зависит от выбора масштаба длины. Если длина наименьшего звена δ→ 0 , то полная длина будет сколь угодно большим. Метрической характеристикой для таких сложных объектов может служить  **хаусдорфова,** или, фрактальная размерность, определяемая формулой

 lnN(δ)

 D = lim ⎯⎯⎯⎯ (4.1)

 δ→ 0 ln 1/δ

где N(δ) - минимальное число кубиков (или шаров), совокупность которых полностью покрывают рассматриваемый объект (его фрагмент), δ - длина ребра кубика (радиус шара). Для точки, линии, квадрата и куба имеем

 N(δ) = δ−0 , δ−1, δ−2, δ−3  (4.2)

следовательно, из (4.1) получим D = d = 1, 2, 3.

 4.2. Приведем примеры применения (4.1) для модельных фракталов.

 Множество Кантора (множество точек) образуется при выбрасывании 1/3 части каждой оставшейся линии. Повторяя этот процесс мы получаем самоподобные элементы множества, для каждого из которых

 N(δ) = 2, δ = 1/3,

следовательно, фрактальная размерность множества равна

 D = ln2/ln3, O < D < 1 (4.3)

 Симметричная самоподобная деформация Коха реализуется по следующему алгоритму. Первоначальная линия единичной длины делится на равные 4 части, средние отрезки располагаются симметрично на относительных расстояниях 1/4. Каждый элемент последовательно испытывает такую деформацию. В этом случае N(δ) = 8, δ = 1/4 и фрактальная размерность симметричной кривой Коха равна

 D = ln8 / ln4 = 3/2, 1 < D < 2 (4.4)

Для асимметричной деформации, реализуемой только в одном направлении N(δ) = 5, δ = 1/3 , следовательно

 D = ln5/ ln3, 1 < D < 2 (4.5)

 4.3. Для приложений к реальным явлениям необходимо построить модели самоподобных деформаций поверхности, так как обычно физическая величина распределяется не по линии, а на поверхности и в объеме. Самоподобную деформацию поверхности рассмотрим в виде

 γ

 Sn δ0

 ⎯⎯ = (⎯⎯), (4.6)

 S0  δn

где δn, Sn − минимальный размер ячейки и площадь поверхности после n - й деформации. Величина γназывается показателем **скейлинга**. В теории критических явлений (фазовых переходов) масштабно-инвариантные явления называются также скейлинговыми. Число элементов поверхности, соответствующее (4.6) определяется как

 N(δn) = Sn / δnd-1 (4.7)

где d - топологическая размерность пространства, куда вложена деформируемая поверхность . После этого мы можем определить хаусдорфа размерность фрактальной поверхности:

 lnN(δn) ln(S0δ0 γ /δn γ +d-1 )

D=lim ⎯⎯⎯⎯⎯ = lim ⎯⎯⎯⎯⎯⎯⎯⎯⎯ = d−1+γ (4.8)

δn → 0 ln1/δn  δn → 0 ln(1/δn)

Используя (4.6) показатель скейлинга можно найти непосредственно из вида конкретной деформации. В одном акте симметричной деформации поверхности, площадь возрастает в 3 раза (деформация происходит в двух направлениях), размер ячейки уменьшается в 4 раза, следовательно

 ln(Sn /S0) ln 3

 γ=γ0 = ⎯⎯⎯⎯⎯⎯ = ⎯⎯⎯ = 0,7925 (4.9)

 ln(δ0/δn) ln 4

Для односторонней деформации поверхности, реализуемой только в одном направлении, имеем

 γ = γ = ln(5/3) / ln3 = 0,465 (4.10)

Значения γ0, γ можно определить также из формулы(4.8), зная фрактальную размерность D.

 Представим изотропную деформацию пространственного объекта (d=3) по симметричному механизму. Число элементов поверхности будет равно 48 (учитывается внутренняя и внешняя поверхности), размер ячейки 1/4, следовательно

D=ln48 / ln4, γ0 =D+1-d=ln3 / ln4=0,7925 (4.11)

Для анизотропной (односторонней) деформации поверхности имеем

 D=ln5 / ln3, d=2, γ=D-1= (ln 5/3) / ln3=0,465 (4.12)

Найденные выше различными способами значения γ0 , γ являются универсальными характеристиками нелинейных хаотических явлений различной природы. Дело в том, что использованные простые скейлинговые модели соответствуют принципу максимума энтропии, который выполняется при стохастизации динамических систем, например при турбулентном перемешивании. Информационная энтропия (или необходимая информация для описания явления) для импульсов любого остального вида (синусоида, дельтаобразный импульс) меньше, чем у использованных прямоугольных импульсов.

 В работе показано, что экспериментальные данные по теплообмену в развитом турбулентном режиме описываются формулой

 γ0

 Nu=CR (4.13)

где Nu- критерий Нуссельта, R- число Рейнольдса. Формула (4.13) следует из (4.6), если учесть , что Nu Sn , δn ν/U, где ν - кинематическая вязкость, U - характерная скорость. Значение γ установлено в работе и использовано для описания распределения скорости, спектральной плотности энергии турбулентности, интенсивности теплообмена при наличии крупномасштабных (анизотропных) структур в неоднородном турбулентном течении, как струя, след, пограничный слой. Чисто анизотропная модель турбулентного перемешивания (γ=γ) применима для переходных режимов, реализуемых при относительно малых значениях R,а изотропная модель (γ=γ0) - для больших значений R.

# 5. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА

Дается определение и обсуждается смысл понятий как фазовый портрет, показатель Ляпунова, функция распределения, корреляционные и спектральные функции. Алгоритмы численного определения указанных характеристик будут рассмотрены отдельно.

 5.1. Фазовый портрет

 Эволюцию динамического хаоса с изменением управляющего параметра α и его структурность можно проследить на примере простейшего логистического отображения

 x α xx (5.1)

 При фиксированных относительно малых значениях α (α < 3,6) после многих итераций x достигает устойчивых циклических значений x\* . С ростом α (α > 3,6) значения x\* становятся неоднозначными, затем хаотическими (λ > 4). Детальное изучение фазового портрета - зависимости x\* (α) показывает, что хаос чередуется с порядком: с ростом α вновь появляются устойчивые циклы, имеет место перемежаемость. Это свойство динамического хаоса наблюдается независимо от конкретного вида нелинейного отображения.

 5.2. Показатели Ляпунова

Запишем отображение (5.1) в виде

  ƒ ( (5.2)

Отклонение фазовых точек друг от друга после N итераций можно количественно описать в виде

 Nλ(х0)

 ε е = ⏐ƒN (х0+ε)−ƒN (х0)⏐ (5.3)

где λ (х0) - показатель Ляпунова относительно точки х0 , ε − малая величина. Из (5.3) можно точно определить λ (х0):

1 ƒN (х0+ε)- ƒN(х0)

 λ(х0) = lim lim ⎯ ln ⏐⎯⎯⎯⎯⎯⎯⎯⎯⏐ =

 N→ ∞ ε→ 0 N ε

 1 dƒN(х0)

 = lim ⎯ ln ⏐⎯⎯⎯⎯⏐ (5.4)

 N→ ∞  N dx0

Численным дифференцированием ƒΝ можно получить набор показателей Ляпунова λ. В книге [11] описаны эффективные алгоритмы численного определения λ).

 При λ( фазовая траектория устойчива, λ соответствует бифуркациям в точках , при λ траектории хаотизируются.

 Области изменения знака λ удобно искать используя **неподвижную** **точку** х\*, определяемую из условия:

  ƒ( (5.5)

 Критерием устойчивости неподвижных точек является условие

 dƒ(\*)

 ⎯⎯⎯⎯ < 1 (5.6)

 d\*

 С ростом параметра α неподвижная точка может оказаться неустойчивой, т.е. λ ( Существует связь λ (α), следовательно показатель Ляпунова также играет роль управляющего параметра, который характеризует наступление хаоса.

 5.3. Распределение вероятностей.

 Существование предельной функции распределения вероятностей ρ ( (плотности вероятности) при стохастизации динамической системы строго доказано [11]. Пусть дано отображение на единичном интервале:

  ƒ ∈ (5.7)

Тогда плотность вероятности определяется через дельта-функцию Дирака в виде

 1 N-1

 lim δ (5.8)

 N→ ∞ N =0

Требование стационарности ρ ( (независимости от временного шага ) приводит к интегральному уравнению Фробениуса-Перрона:

 1

 ρ (y) = ∫ dx δ (y ρ( (5.9)

 0

Физический смысл возможности перехода от (5.8) к (5.9) заключается в замене временного усреднения через усреднение по ансамблю относительно стационарной функции распределения вероятности (независящей от отдельных реализаций i) инвариантной меры ρ

 Используя свойства δ − функции из (5.9) получаем линейное функциональное уравнение

 N-1

 ρ (y) = ρ (y) ) D (y) / Dy (5.10)

0

где (y) - й корень уравнения y,D (y)/ D(y)- якобиан преобразования от y к х. Решая точно или приближенно (5.10) можно найти ρ (y) затем ρ (.

 В некоторых наиболее простых случаях распределение вероятности можно вычислить аналитически.

 Если перейти к переменной

 2

 ′ = ⎯ arc Sin 1/2 (5.11)

 π

в логистическом отображении (5.7) при α = 4, то получим линейное отображение

 1

 2 ′ 0 < ⎯

 2

 Χ′ (5.12)

 1

 2 (1- ′

 2

для которого плотность вероятности ρ′′) = 1, Из сохранения вероятности

 ρ′′) d x′ = ρ (dx (5.13)

получим

 dx′ 1 1

 ρ ⎯⎯ = ⎯ ⎯⎯⎯ (5.14)

 dx π (x(1-x))1/2

5.4 Корреляционные функции

 Корреляции определяют пространственную и временную связь между случайными величинами. Зависимость корреляций между реализациями в динамическом хаосе от параметра l (расстояние между ) определяется как

 1

 Cl = lim ⎯⎯ ∑ θ (l (5.15)

 N→ ∞ N2

где θ − функция Хевисайда:

 l -

 θ ( l - | (5.16)

1, l -

 Хакенс показал [6], что построив по однойсоставляющей m - мерный вектор

 m m (5.17)

можно получить сведения о размерности динамической системы. Именно корреляции, вычисленные для случая m= 3 эквивалентны корреляциям реального трехмерного вектора с составляющими t yt, t): зависимости ln C(l) от ln l имеют одинаковый наклон. На практике, чтобы судить о размерности изучаемого явления, находят предельный вид указанной зависимости (ее насыщение), который достигается с ростом m. Корреляции физических величин в стохастических явлениях могут быть непосредственно вычислены, если известны аналитические выражения, описывающие элементарные возбуждения. При стохастизации нелинейной среды образуются квазичастицы (элементарные возбуждения) в виде солитонов, вихрей и т.д., которые определены теоретически в отдельных случаях [12] . В работах [5,13 ] найдены аналитические выражения для вихревых солитонов, которые являются структурными элементами гидродинамической турбулентности. Обозначив эти выражения, зависящие от функций тока, в виде r,ϕ), можно вычислить различные корреляции динамических величин

 Ca,в (l) = ∫ a  (r+l,ϕ) br,ϕ) dr (5.18)

где индексы а, в определяют сорт квазичастиц, -

вид динамических величин; r,ϕ − полярные координаты. Интегрируя также по углу ϕ можно получить пространственные корреляции.

 При наличии структурности (перемежаемости) в нелинейной среде корреляции с ростом l в целом спадая, могут осциллировать, принимая и отрицательные значения. Все эти закономерности подтверждаются экспериментами по турбулентности [5,14] . Представляет интерес поиск осциллирующих корреляций (чередование хаоса и порядка) в динамическом хаосе используя формулу (5.15).

 5.5. Спектральные функции

 Спектральная функция находится как Фурье -преобразование корреляционной функции (5.18):

 ,в κ) =∫ C α,b l еl dl (5.19)

где для мнимой единицы использовано такое же обозначение , как для индекса. Случай а=в, = дает спектр мощности, который характеризует энергию движения моды с параметром .

 В случае дискретной реализации физической величины t ищется ее фурье-компонента α( n-й итерации), квадрат модуля которой дает спектр мощности:

 t ακ xp( 2π) (5.20)

Принимая Тn = 2n  можно показать [6], что

 α2kn+1 αα α (5.21)

6. СИНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ИНФОРМАЦИЯ И ЭНТРОПИЯ

 С точки зрения синергетики вводится понятие информации и информационной энтропии - наиболее универсальных статистических характеристик неравновесных явлений, сопровождающих стохастизацию нелинейной динамической системы.

 6.1 Синергетическая информация

 Слово “информация” имеет различный смысл. Общественно-политическая информация представляет собой совокупность сообщений об актуальных новостях социальной системы. В кибернетике понятие информации связано с хранением, обработкой и передачей сигналов. В теории вероятностей информация вводится как аддитивная количественная мера сравнения вероятностей случайных событий относительно друг друга. Мы будем пользоваться вероятностной трактовкой информации, предложенной К. Шенноном, применительно к синергетическим явлениям [15].

 Количеством информации (А/В), которое заключено в событии (сообщении) В относительно А, называется число [16]

 P(A/B)

 log ⎯⎯⎯⎯ (6.1)

 P(A)

Появление события В=А можно интерпретировать как сообщение о том, что наступило А.

 Число (A/A) = (A) называется количеством информации (А), заключающейся в сообщении А:

 log P(A) (6.2)

Величина всегда неотрицательна, так как . Если выбрать основание логарифма равное 2, то тем самым вводим единицу информации - бит. Один бит-это количество информации, необходимой для различения двух равновероятных альтернатив. Например, информация, извлекаемая из исхода бросания симметричной монеты равна

 1

 log 2  = log2 2 = 1 бит (6.3)

 2

Если события А и В независимы, то : событие В не несет в себе никакой информации относительно А и наоборот. Всегда выполняется равенство

 (6.4)

Если события А и В независимы, то информация от одновременной реализации их определяется как

 (6.5)

Выражение (6.5) можно было ввести как условие аддитивной природы информации, тогда рассматривая его как функциональное уравнение, мы получили бы (6.2) в виде его единственного решения. Из (6.2) следует единственно универсальный, но важный смысл информации: информативным являются события с малой априорной (теоретической, доопытной) вероятностью. Другими словами, много информации несут в себе неожиданные события. Этот вывод не относится к уникальным (редким), неповторяющимися событиям. В конкретных случаях смысл информации будет совершенно различным в зависимости от условии ее приема. Одним из возможных носителей информации является электромагнитное поле. Результат приема электромагнитного излучения всегда неоднозначен: влияет флуктуация количества фотонов, потеря фазы электромагнитной волны и т.д. [17]. Вообще на вопрос, что такое информация, нет однозначного ответа. Информация по сути и материальна, и духовна.

 В синергетике информация становится основным объектом исследований. Самоорганизация всегда структурна и одновременно, стохастична. Эти два фактора - нарушение симметрии и вероятностный характер явления обеспечивают достаточность условия для порождения информации системой. В науку введено новое понятие “синергетическая информация” [15], означающее, что информация определяется (по формуле (6.2)) через дискретные вероятности  появления структур в процессе самоорганизации. Выражая через вероятности более элементарных процессов  в виде

  α (6.6)

можно придать определенный смысл информации через элементы матрицы перехода α.

 6.2 Информационная энтропия

 Энтропия (греческое слово “превращение”) введена впервые в термодинамике как мера необратимого рассеяния энергии и определяется в виде полного дифференциала

 dS = δ (6.7)

где δ - количество теплоты, получаемое системой, Т - температура.

 Несмотря на традиционность определения энтропии S по Клаузиусу в виде (6.7), это определение не раскрывает полностью ее смысла. Энтропия Клаузиуса определена только с точностью до аддитивной постоянной. Из (6.7) не следует способ непосредственного измерения энтропии, так как температура относится к равновесному состоянию, которое не реализуется в условиях подвода тепла к системе. По этой причине не существует энтропометров, позволяющих измерить энтропию, определяемую по (6.7).Связь возрастания энтропии с направлением подвода энергии является “озадачивающим утверждением” (17, с.62), следующим из (6.7). Наконец, термодинамическое определение энтропии (6.7) не учитывает детальную специфику неравновесных явлений.

 В статистической физике энтропия вводится как логарифм статистического веса макроскопического состояния подсистемы ΔГ [18]:

 S = ln ΔГ, ΔГ Δр.Δ hs  (6.8)

где Δр Δ - фазовый объем, h - постоянная Планка, S - число степеней свободы системы. В классической физике h отсутствует и обезразмеривание фазового объема произвольной постоянной приводит к неоднозначному определению энтропии. Вид формулы (6.8) следует из требования аддитивности энтропии сложной системы:

 S ΔГSΔГ1ΔГSΔГSΔГ (6.9)

Вычисляя энтропию идеального газа по формуле (6.7) можно прийти к (6.8), где ΔГ определяется через объем, давление и температуру идеального газа.

 Понятие энтропии связано также с распределением вероятностей случайных величин. При равновероятном распределении энергии Е вероятность реализации подсистем определяется как

 Δ Γ (6.10)

следовательно, энтропию находим в виде

 S = ln ΔΓ = − ln Ρ (< Ε (6.11)

По смыслу средневероятного (6.11) запишем в виде

 S =- ln  (6.12)

Энтропия, определенная по формуле (6.12), называется информационной энтропией. Из сравнения формул (6.2), (6.12) видно, что информационная энтропия определяет средневероятное значение информации. При равновероятном распределении подсистем неопределенность о системе достигает максимума, т.е. вся информация о системе стирается и превращается в энтропию (формула (6.11) ). Приобретение информации сопровождается уменьшением неопределенности, поэтому количество информации можно измерять количеством исчезнувшей неопределенности, т.е. энтропии [19]:

 S SS  (6.13)

где индекс Pr означает “априори” (до опыта”), а Ps -”апостериори” (после опыта). По этой причине в литературе выражение (6.12) называется иногда информацией (если она приобретена), иногда энтропией (если она потеряна).

7. ЭНТРОПИЯ НЕРАВНОВЕСНЫХ СИСТЕМ

 Рассматривается подходы к определению энтропии, зависящей от времени и координат в неравновесных системах.

 7.1. Уравнение баланса энтропии. Производство энтропии.

 В неравновесных процессах физические величины меняются во времени и пространстве. Эти процессы изучаются на основе законов сохранения числа частиц (кинетическое уравнение),массы (уравнение диффузии), импульса (уравнения движения), энергии (первый закон термодинамики). Наиболее общие закономерности неравновесных процессов описываются уравнением баланса энтропии (вторым законом термодинамики). В неравновесных процессах энтропия не сохраняется, ее эволюция определяет направление процесса, качественные изменения свойств системы. В общем случае уравнение баланса энтропии имеет вид [20]

 →

 ∂S (r,t) → → →

 ⎯⎯⎯⎯ + div S (r,t) = σ (r,t) (7.1)

 ∂t

 →

где S - поток энтропии, σ - производство энтропии,

→ →

r, t - координата и время. Функция σ(r, t) всегда положительна и вносит вклад к росту энтропии за счет диссипативных (необратимых) процессов. Вид

 →

функций S, σ определяется из вышеуказанных законов сохранения.

 7.2. Энтропия Больцмана

 Из кинетического уравнения Больцмана, для энтропии S (r,t) следует уравнение [20]

 →

 dS ( r, t) → → → → →

 ⎯⎯⎯⎯ = - k ∫ I ( r, p ,t) ln f ( r, p,t) dp (7.2)

 dt

где k - постоянная Больцмана, I - интеграл столкновений, f -функция распределения молекул газа. Всегда Ι ≥ 0, ≤ 1, поэтому из (7.2) следует

 dS (t) → →

 ⎯⎯⎯⎯ ≥ 0, S (t) = ∫ S ( r, t ) d r (7.3)

 dt

т.е энтропия замкнутой системы не может со временем убывать: она либо возрастает, либо остается неизменной (в равновесном состоянии). Вместо S Больцман использовал функцию Н= - S. Поэтому закон возрастания энтропии называется H - теоремой.

 Энтропию неравновесных состояний газа Больцман определил в следующем виде

 → → → → → →

 S (t)=-kn ∫ ( r, p, t ) ln ( r, p, t)d r d p) (7.4)

где n - средняя плотность числа частиц, - одночастичная функция распределения.

 Для исследования произвольных неравновесных процессов формула энтропии (7.4) обобщается в виде [20]

 S(t) = - k ∫ N (,t) ln N (,t) d, (7.5)

 ∫N  (,t) d = 1

где - набор переменных, характеризующих состояние системы, N - N - частичная функция распределения.

 7.3.Принцип минимума производства энтропии. Теорема Пригожина.

В равновесном состоянии производство энтропии σ равно нулю. Но в стационарном неравновесном состоянии, которое может поддерживаться граничными условиями (перепадом температуры, давления и т.д.) σ не исчезает. Теорема Пригожина гласит, что в стационарных, слабо неравновесных состояниях полное производство энтропии минимально. Справедливость этой теоремы проиллюстрируем на конкретном примере [21,22].

 Необратимые процессы при малых отклонениях от равновесного состояния можно описывать линейной зависимостью

 Υ Lik (k)  (7.6)

 k

где Υ() - потоки физических величин, Lik - феноменологические или кинетические коэффициенты, (к) - термодинамические силы. Согласно соотношениям взаимности Онсагера Lik = Lki. Анализ строгих уравнений процессов переноса показывает, что в общем виде

 σ = ∑ Υ Lik (I) (k)  (7.7)

 i,k

При наличии градиента температуры ∇Τ поток тепла определяется как

 → →

 Υ = − χ∇Τ, χ = L Υ = L∇ (Τ−1) (7.8)

где связь коэффициента теплопроводности χ с феноменологическим коэффициентом L выбрана в виде, удовлетворяющем (7.6). Полное производство энтропии Р равно объемному интегралу от плотности источника σ:

 → →

 Ρ = ∫ σ d r = L∫ (∇Τ−1)2 d r (7.9)

Найдем условия минимальности функционала (7.9) при условии постоянства температуры на границах объема. Уравнение Эйлера-Лагранжа для данной вариационной задачи имеет вид [23]

 ∂ƒ 3 ∂ ∂ƒ

 ⎯⎯⎯ − ∑ ⎯⎯ ⎯⎯⎯⎯⎯⎯⎯⎯ = 0 (7.10)

 ∂ (1Τ) ∂ α  ∂ [∂ (1 / Τ) ∂ α]

 →

 ≡ ( ∇Τ−1)2, 2

Выполняя дифференцирование в (7.10) получим

 ∇2 ( Τ−1 ) = 0 (7.11)

что эквивалентно уравнению Лапласа, описывающему стационарное ( ∂Τ ∂t = 0 ) распределение температуры

 Δ Τ = 0 (7.12)

Следовательно, доказано, что состояние с минимальным производством энтропии является стационарным. Этот принцип выражается неравенством

 d2S dσ

 ⎯⎯⎯ = ⎯⎯⎯ ≤ 0, σст ≤ σ (t) (7.13)

 dt2 dt

где σст  - производство энтропии в стационарном состоянии, σ (t) - в момент t процесса установления стационарного состояния. Теорема Пригожина доказана в рамках линейной термодинамики. В области, далекой от равновесия, универсальный критерий эволюции в виде (7.13) установлен для неполного дифференциала σ. Несмотря на это теорема Пригожина правильно утверждает возможность стационарного состояния неравновесных систем, что доказано многочисленными экспериментами различного характера.

 Ю.Л.Климонтович доказал, что турбулентность в жидкости представляет собой процесс самоорганизации: производство энтропии в турбулентном состоянии меньше, чем в ламинарном состоянии. Поэтому можно говорить в более общем смысле теоремы Пригожина о “принципе минимума производства энтропии в процессах самоорганизации”, утверждающем σуст  ≤ σнеуст.[24].

 7.4. Принцип максимума информации

 По смыслу этот принцип, рассмотренный в книге [15] равнозначен принципу максимума энтропии, если под информацией понять необходимую (априорную) меру определенности о системе. Информационная интерпретация второго начала термодинамики, как было отмечено в предыдущем разделе, более удобна к применению к неравновесным системам. Так, J. Джейнс показал [15], что из принципа максимума информационной энтропии

 S = −∑ ln i  (7.14)

 I

при ограничениях

   (7.15)

можно вывести все основные формулы термодинамики. Первое из условии (7.15) соответствует законам сохранения. Например, может означать энергию системы в k - состоянии. Экстремум энтропии (7.14) ищется методом множителей Лагранжа, широко применяемым в теоретической физике [18,22]. Неизвестные коэффициенты находятся из условия нормировки Pi.

 В таком подходе к проблеме неравновесных явлений основную трудность представляет адекватный выбор законов сохранения открытой нелинейной диссипативной системы.

 7.5. Энтропия Колмогорова

 Формула Шеннона для информационной энтропии обобщается на динамическую систему произвольной размерности выражением для энтропии Колмогорова(К - энтропии). Пусть d - мерное фазовое пространство разделено на ячейки размера ld, состояние системы измеряется через интервалы времени τ, Pio, in - совместная вероятность того, что фазовая точка (t = 0) находится в ячейке I0, t τ) - в ячейке in. Тогда К - энтропия вычисляется по формуле

 1

 К = - lim lim lim ⎯⎯ ∑ Pio iN ln Pio iN (7.16)

 τ → 0 l→0 N→ ∞ Nτ i0 iN

К - энтропия является метрическим понятием, т.е. связана с определением меры. Можно убедиться, что выражение (7.16) является частным случаем энтропии Реньи порядка для вероятностной меры:

 1

 К lim lim lim ⎯⎯⎯⎯ ln ∑ Pio iN (7.17)

 τ→0 l→0 N→∞ Nτ(1− io,iN

40

Выражение (7.16) является пределом формулы (7.17)при → 1.

 К - энтропия определяется через простую сумму положительных ляпуновских показателей с общим числом m [24]:

  m +

 К = ∑ λ (7.18)

Смысл результата (7.18) состоит в том, что средняя потеря информации пропорциональна положительному показателю Ляпунова, определенному в точке. Экспоненциальная неустойчивость движения описывается формулой

 D(t) = D (0) еkt , (7.19)

 D(t) = ((t) (t)2 )1/2

 1 ≤ ≤ N

где D(t) - расстояние между фазовыми точками ″1″, ″2″ в момент времени t, D (0) - cоответствующее расстояние в начальный момент, К= К(t) - энтропия Колмогорова.

8 МУЛЬТИФРАКТАЛЫ

 Вводится понятие мультифракталов - наиболее сложных объектов нелинейной физики. Приведены формулы, определяющие размерность мультифракталов, их спектральные свойства.

 В природе распределение в пространстве параметров **меры** - аддитивно слагающейся величины (длина, площадь, объем, масса, заряд, энергия и т.д.) является сильно флуктуирующим, перемежаемым. К примеру относится народонаселение на Земле, распределение энергии турбулентности, примесей в полупроводниках, концентрации золота на планете. Общие закономерности указанных явлений установлены теорией мультифракталов [8]. Для конкретности в дальнейшем будем говорить о распределении меры на геометрическом носителе.

 Общепринятого определения мультифракталов нет. Приведем ряд утверждений, которое могут служить логическими компонентами строгого, обобщающего определения мультифракталов.

 - Перемежаемое распределение меры на геометрическом носителе связаны с мультифрактальными мерами.

 - Мультифрактальный объект характеризуется набором фрактальных размерностей.

 - Структурно - иерархически взаимосвязанные фрактальные объекты образуют мультифрактал.

 8.1. Размерность Реньи

 Мультифрактальная размерность, или, обобщенная размерность определяется формулой Реньи

 1 ln N (,δ)

 D lim (8.1)

 δ→0 lnδ

где δ - характерный размер ячейки множества, N=(δ)- минимальное число ячеек , содержащих меру и необходимых для покрытия исходного подмножества, порядок мультифрактального момента, принимающий значения ∞ ≤ ≤ ∞. Одной из интерпретаций физического смысла параметра заключается, как будет показано дальше, в его эквивалентности обратной температуре (как положительной, так и отрицательной). Множитель ( 1 )-1 , отличающий (8.1) от формулы Хаусдорфа (4.1) обеспечивает равенство D c топологической размерностью при равномерном распределении меры. Вероятностная мера в евклидовом пространстве с размерностью d определяется как

 N (δ) = ∑ μ(δ) = Ν(δ)⋅δd, μ (8.2)

где μ вероятность реализации меры в ячейке . В случае равномерного распределения меры

 N (δ) = δ−d  (8.3)

Подставляя (8.2), (8.3), в (8.1) имеем

  1 ln δd

 D ⎯⎯⎯ lim ⎯⎯⎯⎯⎯⎯ = d (8.4)

 δ→0 ln δ

 8.2. Показатель перемежаемости

 Перемежаемость (чередование различных структурных элементов) в мультифрактальном множестве проявляется в виде различной (по ) зависимости числа структурных элементов от их характерного размера [25]:

 ln N(δ,)

 N(δ, ~ δ−τ τ ( lim ⎯⎯⎯⎯ (8.5)

 δ→0 lnδ

Функция τ называется показателем перемежаемости, она непосредственно связана с обобщенной размерностью:

 1

 D τ (8.6)

 1

Введение дополнительной функции τ связано с тем, что она легко определяется из эксперимента.

 Пусть mt - число шагов временного ряда, после которого расстояние (разность измеренных значений) равно δ. Вероятность попасть в гиперкуб с ребром δ равна Рt 1/mt. Время считается дискретной переменной: t= 1, 2, 3,.., mt=m1,m2,...Подсчитаем число ячеек, содержащих вероятностную меру μ , распределенную в пространстве с топологической размерностью d. В отличие от случая, соответствующего (8.2) число точек (вероятностная мера) неравномерно распределенного ячейкам. Считая одинаковым размер ячеек, имеем

 Nd (δ) = ∑ μδd  δd ∑ Ρtmt (8.7)

 t

 = δd ∑ mt mt mt(δ)

 t

Используя (8.5) получим соотношение, позволяющее определить τ графически в логарифмических координатах:

 δ−τ  t t (δ) (8.8)

 t

8.3. Показатель сингулярности меры

 Мультифрактальный объект имеет **самоподобную иерархическую** природу, поэтому изменение меры в нем зависит масштабно-инвариантным (скейлинговым) образом от размера ячейки в виде ~ δα, где α − показатель скейлинга. Из-за структурности мультифрактального множества и проявления этого свойства в виде перемежаемости производная меры в каждой точке будет иметь особенность (сингулярность), поэтому показатель α называется также показателем сингулярности меры, или, показателем Липшица-Гельдера. В математическом анализе сингулярные (дробные) производные меры определяются как

 δ

 lim ⎯⎯⎯⎯⎯⎯⎯⎯ (8.9)

 δ→0 δα

где α - показатель Липшица-Гельдера, α< 1. Если α = 1, то существует обычная производная, при α > 1 производная постоянна.

 Из принятого определения α следует

 Δ δ ~ δα (8.10)

т.е. α можно рассматривать также как локальную (относящуюся к ячейке) фрактальную размерность.

 8.4. Мультифрактальная спектральная функция.

 Рассмотрим набор ячеек ς (α) с одинаковыми значениями α. Обозначим через ƒ (α) фрактальную размерность этого подмножества ζ(α).Тогда функции ƒ(α) можно придать смысл весовой доли заданного значения фрактальной размерности и назвать ее мультифрактальной спектральной функцией по аналогии со спектральной функцией энергии, определяющей ее распределение по частотам. Очевидно, что ƒ (α) ≤ D0, где D0 - фрактальная размерность полного множества.

 Пусть плотность вероятности реализации набора ς (α) равна ρ ( Тогда число ячеек в интервале d α

 dNα(δ) = ρ(α) δ−ƒ(α) ⋅ α (8.11)

Вероятностная мера порядка распределенная на носителе c топологической размерностью d, определяется как

 Ν (δ,) = ∑ μ(α) ⋅ δ ∫ δα+ α (δ) = (8.12)

 = ∫ δα−ƒ(α)+ ρ (α) α, ≤ ƒ(α) ≤ D0

Интеграл (8.12) можно оценить его максимальным значением, которое достигается при минимуме α − ƒ(α) (т.к. δ < 1):

 d d2

 ⎯⎯ (α − ƒ(α))⏐α=α = 0, ⎯⎯ (α - ƒ(α)) > 0 (8.13)

 dα dα2

или

 ƒ′ (α) = ƒ′′ (α) < 0 (8.14)

Значит, по определению ƒ(α) − выпуклая функция с максимумом при и спадающая при → ∞. После этого имеем

 Nd (δ) = δα−ƒ(α) . δα=α (8.15)

где учтено

 ∫ ρ (α) α = 1 (8.16)

Чтобы связать ƒ(α) с экспериментально определяемой функцией τ вычислим обобщенную фрактальную размерность D относительно топологической размерности носителя d. Подставив (8.15) в формулу (8.1)получим

  ƒ(α) − α (8.17)

Используя (8.6) для разности получим искомую связь в виде

 ƒ (α ()) = α() + τ( ) (8.18)

Отсюда следует решение первого уравнения (8.13):

 d

 α ⎯⎯ τ() (8.19)

 d

Уравнения (8.18), (8.19) задают параметрическое представление кривой ƒ(α).

9. СООТНОШЕНИЕ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ И МУЛЬТИ-ФРАКТАЛЬНОСТИ.

 Сопоставляются значения показателя перемежаемости и мультифрактального спектра для реперных мультифрактальных порядков, раскрывается их физический смысл. Устанавливается их связь с фрактальными размерностями ячейки и полного множества.

 9.1. Преобразования Лежандра

 Формулы (8.14), (8.18), (8.19), связывающие показатель перемежаемости с мультифрактальной спектральной функцией имеют свойство цикличности: переменные τ− τ′ выражаются через α ƒ (α), ƒ′(α) так же, как последние величины выражаются через первые. В этом можно убедиться, записав их в форме

 ƒ′ (α), τ ƒ (α) −α ƒ′ (α) (9.1)

 α = −τ′ ƒ (α) = τ τ′ (9.2)

Такие преобразования, содержащие производные функций и образующие **циклическую группу**  называются преобразованиями Лежандра. Преобразования Лежандра широко используются в неравновесной термодинамике [23]. Дифференцируя по α из (8.14) получим еще одну связь между τ и ƒ(α) в виде

 τ′′ ƒ′′ (α) = − 1 (9.3)

которая может найти применение в общей теории мультифракталов.

 9.2. Предельные и экстремальные значения ƒ (α), τ ().

 По условию определения (8.12) - (8.14) ƒ(α) имеет максимум при и спадает до нуля при → ± ∞:

 ƒ (α (0) ) = ƒ (α (± ∞) → 0 (9.4)

Из (8.18) следует

 τ0 ƒ (α(0) ) = (9.5)

Для определения предельных значений τ ± ∞) нужно знать соответствие максимальных и минимальных значений α различным знакам . Из определения α для локальной вероятностной меры (8.10) имеем

 ∑ μ δα  (9.6)

Значит, отрицательным значениям соответствуют наибольшие значения α, и наоборот. Учитывая (8.19) получим

 τ( − ∞ ) - αmax , τ ( + ∞) ~ − αmin  (9.7)

 9.3. Мультифрактальность без перемежаемости и информационная энтропия.

 Из определения показателя перемежаемости через вероятностную меру

 N,δ) = ∑ μ δ−τ(α) , ∑ μ (9.8)

следует τ (1) = 0 (9.9)

т.е. при перемежаемость отсутствует. Из (8.18) имеем

 ƒ(α1) = α1, α1 ≡ α (9.10)

При отсутствии перемежаемости (различия структур) спектральная функция (фрактальная размерность подмножества ζ (α) ) равна фрактальной размерности ячейки. Этот результат можно рассматривать как проявление свойства  **самоподобия** мультифрактального объекта.

 Случай является сингулярным в формуле (8.1), поэтому воспользуемся следующими выражениями, соответствующим пределу → 0:

 μ μμ μexp (ln μ ≈ μln μ),

ln ∑ μ≈ μln μ ≈ μ ln μ (9.11)

Подставляя (9.11) в (8.1) найдем мультифрактальную размерность

 ∑ μδln μδ S(δ)

 D1 = lim ⎯⎯⎯⎯⎯⎯⎯⎯ = lim ⎯⎯⎯ = S (9.12)

 δ → 0 ln δ δ→ 0 lnδ

где S(δ) - энтропия разбиения меры по ячейкам, S - энтропия меры полного множества. Учитывая

 dτ(

 α1 = − ⎯⎯⎯ ⏐  (9.13)

 d

и формулу (9.10) получим

 ƒ (α1) = α1 =  S (9.14)

Как и следовало ожидать, при отсутствии перемежаемости ( фрактальная размерность ячеек, подмножества набора их равны мультифрактальной размерности, которая численно равна информационной энтропии. Этот факт является следствием статистической природы мультифракталов.

 Перемежаемость и мультифрактальность являются эквивалентными, дополняющими друг друга характеристиками структурно-стохастического нелинейного объекта. При 0 мультифрактальность отсутствует, можно говорить о перемежаемости числа ячеек N δ, не содержащих меру. При ≠ − 1 нет перемежаемости, распределение мультифрактальной меры описывается **безусловной**  информационной энтропией. В случаях ≠ 0,+1 необходимо рассматривать  **смещенную** (условную, зависящую от ) энтропию [26].

 После этого можно уточнить физический смысл порядка мультифрактального момента и соответствующего спектрального анализа. Обычно первые моменты физических величин имеют ясный физический смысл. Так, первый момент скорости связан с импульсом, второй момент - с энергией, третий момент - с потоком энергии и т.д. Смысл порядка вероятностной меры можно выяснить используя термодинамическую аналогию мультифрактального формализма, на возможность которой указывает результат (9.14). Если сопоставить сумме вероятностной меры с порядком статистическую сумму, спектральной функции ƒ (α) - энтропию в статистическом смысле, то параметр соответствует обратной температуре [25].Отрицательному значению соответствует  **отрицательная** **температура**- формальное понятие, используемое для описания неравновесных явлений [18]. Согласно (9.7) восходящяя область кривой ƒ (α) соответствует значениям 0, нисходящая область - значениям 0. Кривая ƒ (α) может служить универсальной характеристикой нелинейных явлений . В работах [27, 28] показано, что различные эксперименты по однородной и неоднородной турбулентности могут иметь общие закономерности, описываемые кривой ƒ (α).

 Значения ±1 приводят к разным количественным результатам в теории мультифракталов. Поэтому в более точной интерпретации смысла нужно учесть различие характеристик самих структур множества. В работе [28], где получено лучшее согласие с экспериментом, было принято 0 как число пар взаимодействующих вихрей ( структурных элементов турбулентности) с одинаковой циркуляцией, а случаю противоположных циркуляций сопоставлены значения 0.

10. САМОАФФИННЫЕ МУЛЬТИФРАКТАЛЫ

 Вводится понятие о самоаффинных (неоднородных) мультифракталах, приведены формулы их обобщенной размерности, спектра и пространственного распределения полной меры.

 10.1. Обобщенная размерность самоаффинных мультифракталов.

 Формула Реньи (8.1) определяет размерность **самоподобных** мультифракталов, коэффициент подобия у которых одинаков по всем пространственным (временным) переменным. При наличии неоднородности и анизотропии, что всегда связанно с реальными начальными и граничными условиями структурные элементы нелинейной среды следует рассматривать как **самоаффиные** мультифракталы- объекты, у которых коэффициенты подобия различны по разным переменным.

 Будем исходить из более общих **функциональных** **соотношений** для определения [29]. Воспользуемся **неравенством**  **Гельдера** для вероятностной меры ячейки (например, для энергии) μ, содержащей различные моменты с порядком :

 ∑ μ ≤ Π ( ∑ μ), ∑ Ρ 1 (10.1)

 i

где Р δ/δ - вероятность реализации масштаба δ при эволюции самоподобной (изотропной) структуры с масштабом δ. Равенство выполняется при наличии связи между числами :

 = const ≡ (  ) (10.2)

Учитывая

  ; ≡ () (10.3)

где принято во внимание(10.2) и нормировка , получим

 (10.4)

Случайное число n имеет смысл максимального числа пар квазистационарных (виртуальных, см. раздел 3) структур. Реализуемое число в общем случае не равно  ≤

 Полная мера, распределенная на фрактальном множестве с обобщенной размерностью определяется как

 ∑ μ δ δ ~ δ (10.5)

где принято равномерное распределение числа изотропных ячеек в множестве. Влияние неоднородности , вызванной различием на распределение числа ячеек целесообразно учесть при определении локальной характеристики - мультифрактального спектра.

 Учитывая (10.5) запишем (10.1) в виде равенства

 ( ∑  ) ( ) ,  (10.6)

Поскольку неизвестно, вначале следует определить  из (10.6), затем, при необходимости, искать Выражение (10.6) нужно рассматривать как функциональное уравнение, связывающее значения обобщенной размерности от аргументов и  .

Уравнение (10.6) имеет два частных решения:

1

   ⎯⎯ logа ∑ (10.7)

 ⎯⎯ logаП Ρ (10.8)

где - фрактальная размерность носителя, а− основание логарифма, которое явно не зависит от и в общем случае определяется неоднозначно [29, 30 ]. Решение (10.7) удовлетворяет (10.6) при выполнении условия

  ⏐ ∑ ⏐∑  (10.9)

следовательно, не описывает произвольную самоаффинность, так как и  связаны однозначно. При выборе а = δ → 0 формула (10.7) переходит в формулу Реньи для самоподобных мультифракталов. Этот факт дает основание принять а= δ как один из вариантов. Решение (10.8) имеет место без дополнительного условия (10.9). Общее для двух решений условие  теперь не исключает возможность реализаций с различными при заданном значении Применимость решения вида (10.8) к описанию именно самоаффинных свойств мультифракталов обосновывается также тем,что оно содержит мультипликатив-ный закон распределения вероятности, порождающее перемежаемость. Самоаффинность есть следствие проявления перемежаемости в самом мультифрактале.

 10.2. Спектральная функция самоаффинного мультифрактала.

 Принимая во внимание определение вероятностной меры ячейки μ) μ неоднородность по распределения числа ячеек в пространстве с топологической размерностью d учтем наиболее простым образом:

 ,δ) = δ δ δ δ (10.10)

Теперь связь между функций перемежаемости τ и обобщенной размерностью (10.8) должна иметь вид

 τ ⎯⎯⎯ (10.11)

В этом можно убедиться определяя через число ячеек, содержащих меру:

 ∑ μ ln δδ

 ⎯⎯⎯ lim ⎯⎯⎯ = ⎯⎯ lim ⎯⎯⎯⎯⎯ = d (10.12)

 δ→0 ln δ δ→0 ln δ

Используя (10.4), (10.8) получим

 dτ( 1

 α( ⎯⎯⎯ = (1+ ⎯⎯) ⏐(α−Α−)1/2 (10.13)

 ƒ(α) = α + τ ⏐ (10.14)

 ⏐logδ Π Ρ⏐ (10.15)

Выбор знака минус перед корнем в (10.13.) обусловлен выпуклостью ƒ(α). Условие максимума ƒ(α) в точке α\*

 ƒ(α\*) = ƒ′ (α\*) = 0, α\* =  (10.16)

позволяет найти постоянное слагаемое, с точностью которого определяется ƒ(α), после которого имеем

  ~ ~ А  ~ ~

 ƒ (α) = 1+4 (⎯⎯)1/2 −2 ( (α−Α)1/2+Α(α−Α) )-1/2) (10.17)

  ~ ~

 α = α − ƒ (α) = ƒ (α) ⏐

Из (9.3) следует связь фактора самоаффинности А с порядком мультифрактального момента

 ⎯⎯ ( (10.18)

 3

При ≥ 3 имеем Α ≤0,05  .. Этот факт согласуется стохастизацией и изотропностью системы, состоящей из более трех динамически взаимодействующих частей (например, гидродинамических вихрей [5] ).

 Формула (10.17) правильно описывает обработку сигналов турбулентности в пограничном слое, среде, атмосфере, если использовать теоретические значения вероятности реализации соответствующих структур - вихревых солитонов [28].

 10.3. Мультифрактальные меры в неравновесных явлениях.

 В силу скейлинговых свойств самоподобный мультифрактал можно считать, если отвлечься от внутреннего строения, обычным фрактальным объектом, у которого 0, ± ∞. Значит, мультифрактальность всегда связана с неравновесностью - одной из основных характеристик процессов самоорганизации.

 Будем искать наиболее общие закономерности изменения меры в пространстве и во времени. Для простоты рассмотрим зависимость только от координат, временная зависимость может быть установлена аналогичным образом. Мера, связанная со всеми взаимодействующими ячейками, находится как аддитивная сумма по всем значениям :

 →  ∞  →  ∞  →

Μ(δ,) = ∑ δ) = ∑ ⋅δ ⏐. (δ) (10.19)

 =-∞  =-∞

 →

где - координата. Неравновесную функцию распределения ячеек N можно заменить локально равновесным распределением Гиббса в пределах масштаба структуры:

 →  →

 N(δ )= exp ( −ε (δ⏐ε0 ) (10.20)

где ε- энергия ячейки, ε0 - положительная постоянная, связанная свойствами всей системы. Введение собственного (корреляционного) масштаба структуры сорта означает замену

  → →

 → δ

 → ⎯ ⋅⎯⎯ = ⎯⎯⋅ , δ→ δ/δ (10.21)

 δ δ δ

так как мера с порядком в ячейке реализуется с вероятностью Определение вероятности реализации самоаффинных структур может быть обобщено с учетом фрактальной структуры самой ячейки:

 ,α =(δ/δα ,δδ, ∑ α = 1 (10.22)

где α − фрактальная размерность (показатель сингулярности),связанная с определением характерного масштаба ячейки. При определении линейного масштаба δ имеем ≤ α ≤ .После этого (10.19) принимает вид

  →

 →  ∞

Μ(δ, ) = ∑ ∑  α exp (−ε( ⎯⋅ α)⏐ε0 ) (10.23)

  ∞ δ

где Dсогласно (10.8) определяется как

   ⎯⎯⎯ logδ Π Ρ,α  (10.24)

 В работе [31] показана возможность применения формулы (10.19) к описанию экспериментальных зависимостей расширения электронно-ионной дуговой плазмы, начального участка турбулентной струи, интенсивности турбулентного теплообмена.

# 11. ЭНТРОПИЯ КАК КРИТЕРИЙ СТЕПЕНИ САМООРГАНИЗАЦИИ

 Обсуждается теорема Климонтовича об уменьшении энтропии при самоорганизации, приводится ее формулировка на языке мультифрактального анализа. Установлены количественные критерии границы информационного и энтропийного описания самоорганизующихся систем.

 11.1 S - теорема Климонтовича.

 Теорема утверждает, что при переходе в более упорядоченное состояние самоорганизации информационная энтропия убывает, если сравнение произвести при одинаковом значении средней энергии [24]. В названии теоремы использована первая буква английского слова “самоорганизация” - S.

 Воспользуемся общей формой функции распределения Гиббса подсистем по энергиям

 ƒ exp ( ) (11.1)

где набор непрерывных переменных, свободная энергия, средняя энергия, - температура, - энтропия, функция Гамильтона, эффективная температура. Пусть значения  **управляющего параметра** - комплексной меры подвода к системе энергии, вещества, информации. С изменением нелинейная система последовательно переходит на различные уровни самоорганизации.  **Равновесное** состояние с функцией распределения ƒ0 примем за состояние **физического хаоса** (при полном равновесии достигается равновероятное распределение, стирающее всю информацию). Неравновесное состояние, поддерживаемое приращением Δ, описывается функцией распределения

 ƒΔ exp ( Δ ) ) (11.2)

 ∫ ƒ ∫ ƒ0

Условие для равенства энергии запишется в виде

 ∫ ƒ0Δ ∫ ƒΔ (11.3)

Из решения этого уравнения находится зависимость Δ необходимая для перенормировки ƒ0, учитывающей Δ.

 Обозначим через S0, S энтропии (7.5), соответствующие распределениям ƒ0, ƒ. Тогда, принимая

  ln ƒ0  (11.4)

 учетом (11.3) получим

  ƒ ln ( ƒƒ0 ) ≥ 0 (11.5)

где использовано неравенство ln ≥ 1−1/α.. Энтропия при самоорганизации уменьшается.

 Если из эксперимента известны дискретные значения вероятностей реализаций

  ƒΔ ƒΔ (11.6)

то условие нормировки функции распределения запишется в виде

 ∑ exp ( ln  )  ln (11.7)

Дополнительное условие S - теоремы для энергии имеет вид

 ∑ ( ln ( exp ( ln ) − ) = 0 (11.8)

Нас интересует изменение , которое определяет степень упорядоченности (в случае увеличения ) системы в неравновесном состоянии. Подставляя F из (11.7) в (11.8) получим

∑ ( ln    ) = 0 (11.9)

Уравнение (11.9) решается дважды относительно для сравнения его значений, второй раз меняются местами. Большее значение указывает на наличие самоорганизации. Таким способом находится зависимость Δ необходимая для перенормировки . Затем по формуле (11.5) количественно находится уменьшение энтропии при самоорганизации.

 11.2 Критерии самоподобия синергетической системы.

 Расширим смысл синергетической информации, представив ее в виде [26]

 I = I ( I ) (11.10)

Непрерывная зависимость вероятности от самой информации учитывает самосогласованность структуирования сильнонелинейной системы, параметр имеет смысл мультифрактального момента.

 Определяя вероятность (I) через функцию распределения ƒ (I) имеем

 ∞

 I= - ln P(I)= - ln ∫ ƒII ƒ (I)= P(I)= I (11.11)

  0

 ∞

∫ ƒ (I) d I = 1

 0

Информационная энтропия определяется как

  ∞

 I ∫ Ρ (I) ln P (I) dI = (I+1) -I  (11.12)

 0

 Самоподобие предполагает наличие неподвижных точек характерных функций процесса самоорганизации:

 P (I) = I I  I I 0,567 (11.13)

 S (I) = I (I I  I I 0,806 (11.14)

Найденные неподвижные точки являются также пределами соответствующих отображений, достигаемыми при любом начальном значении информации I0:

 P(Ii+1)= Ii , lim exp (exp (... exp ( -I0.)...) = I\*1  (11.15)

  → ∞

 S(Ii+1)= Ii , lim exp(exp(...(exp(ln(I0+1)-I0)...)=I\*2 (11.16)

  → ∞

Такая трактовка смысла чисел I\* позволяет проследить эволюцию информации и энтропии по иерархическим уровням с номерами .

 Из условия (11.14) при I+1 ≈ I следует (11.13), также разлагая экспоненту при I имеем

 I+ I - 1=0, I= 0,618 (11.17)

Число Фиббоначи I, определяющее “золотое сечение”, является также пределом отображения

 Ii+1 = Ii + Ii-1  (11.18)

Оно используется в теории динамического хаоса как

“наихудшее” иррациональное число [6].

 Число I определяет вероятность самосогласованной реализации структур, которые порождают информацию, численно равную I . Малоинформативные (типичные, близкие к изотропным) структуры наблюдаются с большей вероятностью, чем I. Для наиболее простой структуры без внутреннего строения I можно рассматривать как локальную энтропию. Тогда I определяет максимальную энтропию структуры, которая может быть описана динамическим образом. С точки зрения статистического описания I -минимальная энтропия, ниже которой теряется синер-гетическая сущность рассматриваемого объекта.

 Число I определяет предельно максимальную энтропию неравновесной самоорганизующейся системы. При самоорганизации энтропия уменьшается по сравнению с состоянием гауссового шума, для которого S= 1. Число I характеризует переходной режим между динамическим и статистическим состоянием системы.

 11.3 Мультифрактальная интерпретация критерия самоорганизации.

 Экспериментальная проверка существования числа I возможна при формулировке S - теорема на языке мультифрактального анализа. Если принять термодинамическую интерпретацию порядка мульти-фрактального момента то условие S - теоремы (11.9) при   определяет вид условной (зависящей от ) энтропии относительно безусловной энтропии. Задание условия через параметр уменьшает меру неопределенности - энтропию. Условная (смещенная) энтропия S всегда меньше, чем безусловная энтропия S , их разность определяет информацию

 I () = S - S () (11.19)

 S= − ∑ ln S ∑ ln ( ∑ )

 ∑ (δ) = 1, − ∞ ≤ ≤ ∞

Вычисляя через информационную меру обобщенную фрактальную размерность (8.1)

 1 I (δ,)

 = ⎯⎯ lim ⎯⎯⎯⎯

 δ→ 0 ln δ

получим все необходимые формулы мультифрактального анализа, в том числе преобразования Лежандра для функций ƒ(α), τ [26]. При по формуле (9.4) ƒ (α1) = S. Поэтому следует ожидать

 ƒ(α()ƒ(α()

 lim ⎯⎯⎯⎯⎯⎯⎯⎯⎯⎯ → S (I\*2)= I\*2 (11.20)

  → ∞ ƒ(α() - ƒ(α()

Этот результат подтверждается для динамического хаоса логистического, кругового отображений. В случае неоднородного хаоса, получаемого, например, диссипативным отображением, необходимо пользоваться спектральной функцией самоаффинных мультифракталов.